Amostragem Aleatória

Neste exercício consideramos todos os sinais aleatórios como tendo valores complexos. Isto nos simplifica consideravelmente os cálculos realizados.

Lembramos que se *x(n)* é um sinal aleatório no tempo discreto, com valores complexos estacionários, sua função de correlação é dada por:

$$\gamma_x(k) = \mathrm{E}[x(n)\ \ x^*(n\text{-}k)]$$

onde $x^*(n\text{-}k)$ é o complexo conjugado de $x(n\text{-}k)$ e o teorema de Wiener-Kintchine nos diz que a densidade espectral de potência (p.d.s.) em freqüências normalizadas esta associada a função de correlação por:

$$\Gamma_x(f) = \mathrm{TF}[\gamma_x(k)]$$

TF é a Transformada de Fourier para freqüências normalizadas.

1) Autocorrelação e Densidade Espectral de Potência de uma Freqüência Pura

Seja o sinal aleatório no tempo contínuo

$$x(t) = Ae^{2\pi j f_0 t}$$

A é uma variável aleatória real de valor médio quadratico $\mathrm{E}[A^2]$.
Amostramos *x(t)* com período T_E.

1.1) Que condição devemos observar em f_0 para que a amostragem respeite a condição de Shannon?

Atenção: de agora em diante esta condição é assumida como sendo respeitada.

Seja $y_1(n) = x(n\mathrm{T_E})$ o sinal amostrado.

Calcular:

1.2) A função de autocorrelação $\gamma_{y_1}(k)$ de $y_1(n)$.

1.3) A p.d.s. em freqüências normalizadas $\Gamma_y(f)$ de $y_1(n)$ em função de f_0 e de $\mathrm{E}[A^2]$.

2) O Efeito de "Jitter"

Chamamos de "jitter" os erros aleatórios que se introduzem no valor do período de amostragem. Neste modelo de "jitter" o período de amostragem no instante *n* é dado por:

$$T_n = n\mathrm{T_E} + \Delta_n$$

- T_E é o valor do período de amostragem de forma determinística.
- Δ_n é uma variável aleatória descrevendo os erros.

Chamamos de $\mathrm{p}_{\Delta_n}(\delta_n)$ a densidade de probabilidade da amplitude de δ_n, e estamos estudando o caso onde Δ_n é distribuído uniformemente entre $[-\Delta_0, \Delta_0]$ da seguinte forma:

$$p_{\Delta_n}(\delta_n) = \frac{1}{2\Delta_0}\prod_{2\Delta_0}(\delta_n) \qquad \text{com } \Delta_0 < \frac{\mathrm{T_E}}{2}$$

$$\prod_T(u)\begin{cases} = 1 & u \in [-\frac{\mathrm{T}}{2}, \frac{\mathrm{T}}{2}] \\ = 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

As variáveis aleatórias Δ_{n1} e Δ_{n2} descrevem os erros nos instantes T_{n1} e T_{n2} respectivamente e são estatísticamente independente, i.e. qualquer que sejam as funções f(.) e g(.):

$$\mathrm{E}[f(\Delta_{n1})\cdot g(\Delta_{n2})] = \mathrm{E}[f(\Delta_{n1})]\cdot \mathrm{E}[g(\Delta_{n2})] \qquad \text{para } n_1 \neq n_2.$$

Enfim, as variáveis aleatórias A e Δ_n são estatísticamente independentes.

O sinal amostrado é:

$$y_2(n) = x(T_n) = x(n\mathrm{T_E} + \Delta_n)$$

2.1 Calcule $\gamma_{y2}(0)$ a autocorrelação de $y_2(n)$ para $k=0$.

2.2 Calcule $\gamma_{y2}(k)$ para $k \neq 0$.

2.3 Mostre que:

- $\gamma_{y2}(k) = \alpha\gamma_{y1}(k) + \beta\delta_{k,0}$
- $\delta_{k,0}=1$ se k=0; e 0 nos outros casos.

2.4 Deduzir a p.d.s. de $y_2(n)$: $\Gamma_{y2}(f)$

3) Modelização do Erro de Amostragem de Uma Outra Forma

O instante de amostragem é dado por:

$$\mathrm{T}_n = n\mathrm{T_E} + \sum_{l=1}^{n} u_l$$

u_l é uma variável aleatória distribuída uniformemente entre $[-U_0, U_0]$:

$$p_{U_l}(u_l) = \frac{1}{2U_0}\prod_{2U_0}(u_l) \qquad \text{com } U_0 < \frac{\mathrm{T_E}}{2}$$

O sinal amostrado é:

$$y_3(n) = x(T_n) = x(n\mathrm{T_E} + \sum_{l=1}^{n} u_l)$$

Calcule:

3.1 $\gamma_{y3}(k)$ a autocorrelação de $y_3(n)$.

3.2 A p.d.s. em freqüências normalizadas de $y_3(n)$: $\Gamma_{y3}(f)$ em função de $E[A^2]$, f_0 e U_0.