

Dissertação de Mestrado

**Campos, Partículas e Simetrias  
de Calibre com Violação da  
Simetria de Lorentz**

**Victor José Vásquez Otoyá**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Instituto de Física

Orientador: Dr. Anzhong Wang

Coorientador: Dr. José Abdalla Helayel-Neto

Agosto de 2004

*Para meus Pais*

# Agradecimentos

- Minha gratidão a José Helayel e Anzhong Wang, pela amizade e prestativa orientação.
- Ao J.Boldo e G. Gomero, pelas valiosas discussões.
- Ao CNPq, pelo suporte financeiro
- Aos Professores José Helayel, Silvio Sorella e Sebastião Alves, por estimular minha paixão pela Física.
- Agradeço ao Rodrigo, Miguel, Garin, Elmer, Eduardo, Paulo, Nilton, João, Diego, Helena, Renata, Ana Carolina, Maria João,... pela amizade.
- Ao Coordenador da Pós-graduação, Marcelo Chiapparini, e aos Professores, Jaime Villas da Rocha e Maria de Fátima Alves da Silva, pela confiança.
- À Fernanda, Laurimar, Keyla, Rosângela, pela ajuda prestada durante este período.
- Ao Jorge e Lucia, pela amizade.
- A meus Pais, Victor Vásquez Sevilla e America Otoyá, minhas irmãs Kelly e Margarita, pelo amor, confiança e apoio.
- Finalmente, quero agradecer a Virginia Torres pela paciência e amor que teve comigo durante todo o meu curso de Mestrado.

# Conteúdo

<b>1 Campos, Partículas e Simetrias de Calibre</b>	<b>7</b>
1.1 O Campo de Maxwell . . . . .	8
1.2 O Campo de Kalb-Ramond . . . . .	10
1.3 O Campo de Maxwell-Kalb-Ramond . . . . .	13
1.4 O Campo de Einstein-Hilbert . . . . .	15
<b>2 Aspectos Peculiares da Relação Campos - Partículas - Simetrias em (1+2)D.</b>	<b>20</b>
2.1 O Campo de Maxwell-Chern-Simons . . . . .	21
2.2 Campo de Kalb-Ramond . . . . .	22
2.3 O Campo de Einstein-Hilbert-Chern-Simons . . . . .	24
<b>3 Propagação de Campos de Calibre em Modelos com Quebra da Simetria de Lorentz</b>	<b>28</b>
3.1 Gravitação com Quebra da Simetria de Lorentz . . . . .	33
<b>4 Discussões Gerais e Perspectivas Futuras</b>	<b>41</b>
<b>A Relações de Dualidade em (1+2)D</b>	<b>45</b>

# Introdução

O tratamento de sistemas físicos em termos de campos clássicos ou quânticos permite uma sistematização muito definida de propriedades espectrais, de aspectos cinemáticos e, sobretudo, de questões ligadas à dinâmica e às interações dos sistemas considerados.

Seja no caso não-relativístico que no regime em que a simetria de Lorentz passa a atuar, o formalismo ditado pelas teorias quânticas de campos articula-se em termos de excitações coletivas que caracterizam modos físicos propagados (é o caso dos fônons, plásmons, mágnons, pólarons, éxcitons, os pares de Cooper e outras quase-partículas em sistemas da Física da Matéria Condensada) ou de partículas fundamentais com números quânticos bem-definidos pelas leis de conservação associadas às simetrias das interações fundamentais (é o caso da matéria fermiônica elementar e dos bósons de calibre associados aos quatro campos de força da Natureza).

A associação campo - partícula é fortemente marcada pela ação das simetrias associadas aos princípios de invariância dos processos físicos onde a partícula considerada interfere. A formulação Lagrangeana para os campos constitui-se no cenário teórico natural para o tratamento das invariâncias e suas correspondentes simetrias. O teorema de Noether organiza o estudo das

cargas e números quânticos associados às simetrias contínuas, e as excitações transportadas pelos campos envolvidos são classificadas em termos destas cargas e números quânticos, uma vez que as eventuais simetrias tenham sido unitariamente implementadas à la Wigner no espaço de Hilbert dos estados do sistema.

As simetrias, em sua versão global, constituem-se num dispositivo de caráter eminentemente classificatório, definindo os números quânticos das excitações físicas e agrupando-as em multipletes de estados degenerados em energia (caso não-relativístico) ou partículas com degenerescência em massa (caso relativístico), sempre que não ocorrerem possíveis violações (ou quebras) de simetrias. Adquirindo o status de simetrias locais, as conseqüências são bem mais abrangentes. Não só o aspecto classificatório emerge, mas o controle do espectro e das interações passa a ser exercido pela invariância local de forma bem mais definida. Este é o ponto central das chamadas Teorias de Calibre ou, em sua forma mais estendida, Teorias de Yang-Mills.

Um dos aspectos marcantes das simetrias locais é exatamente a sua direta interferência no processo de propagação das diferentes excitações que podem estar presentes nos campos relativísticos que definem representações do Grupo de Lorentz, designadas por  $(i, j)$ , nos casos em que os números quânticos  $i$  e  $j$  sejam maiores ou iguais a  $1/2$ , quando diferentes modos de spin (potencialmente, partículas relativísticas) estão associados a um único campo. Nestas situações, as invariâncias locais desempenham papel crucial no estabelecimento de que partícula física o campo irá propagar. As simetrias locais atuam como filtros de excitações espúrias, fazendo com que, nos processos físicos envolvendo o campo em questão, participe apenas aquela que

emerge como a partícula física com massa, spin e outros números quânticos bem especificados. O papel da simetria de calibre é, portanto, crucial para o desacoplamento das possíveis excitações não-físicas.

Entendendo, então, a importância das simetrias, sobretudo aquelas locais, e motivados para um maior esclarecimento a respeito da associação entre campos e partículas, propõe-se, com o material discutido nesta tese, a apresentação de uma série de situações onde se coloca em evidência como as simetrias locais podem definir e organizar a propagação de diferentes modos de spin incorporados num mesmo campo relativístico. Levando em conta que a dimensionalidade do espaço-tempo também é decisiva nesta discussão, serão contemplados sistemas em  $(1 + 3)$  e  $(1 + 2)$  dimensões.

O objetivo central deste trabalho é explicitar diferentes, mas equivalentes, procedimentos para se retirar de um campo, dadas as simetrias impostas, as partículas físicas associadas ao mesmo e, neste contexto, compreender a questão em situações em que a simetria de Lorentz é violada pela presença de um campo de fundo que permeia o espaço-tempo.

Diferentes situações onde violações da simetria de Lorentz podem ocorrer vêm-se aglutinando e constituindo numa atividade de pesquisa bastante visível atualmente, com vasta literatura sobretudo nos últimos dez anos. Como material de introdução a este tópico e esclarecedor sobre o estado-da-arte deste campo de pesquisa, são sugeridos os trabalhos coletados e listados na ref. [1].

Motivados pela compreensão de como as simetrias locais definem a relação

campo - partícula, e com os objetivos gerais manifestados no parágrafo acima, propomos a seguinte organização do material desenvolvido ao longo dos estudos realizados para este trabalho de tese.

No Capítulo 1, adotamos um espaço-tempo quadridimensional para fixarmos as primeiras idéias, e revemos a análise do papel das simetrias locais em associação ao campo de Maxwell (caso padrão das teorias de calibre), ao campo tensorial de Kalb-Ramond (caso bastante interessante, por mostrar uma redução drástica de dois spins-1 a um único escalar na camada de massa) e ao campo de Pauli-Fierz, adotado para descrever o quantum da radiação gravitacional segundo a ação de Einstein-Hilbert. Neste capítulo, não há resultados originais; apenas, discutimos resultados conhecidos de uma forma mais pedagógica, no sentido de elucidar os passos decisivos impostos por uma simetria local na associação campo-partícula.

Em seguida, no Capítulo 2, estabelece-se a mesma proposta, só que, a fim de evidenciar o papel da dimensionalidade do espaço-tempo, realiza-se a discussão em  $(1+2)$  dimensões, onde simetria de calibre e massa para bósons mediadores deixam de ser aspectos conflitantes. Em vista deste resultado, são estudados os campos de Maxwell-Chern-Simons (bastante celebrado na literatura) e de Kalb-Ramond (que, devido à simetria de calibre, perde seu caráter dinâmico neste espaço-tempo, de forma análoga ao campo de Maxwell em  $(1+1)$  dimensões). Conclui-se este capítulo com uma análise do propagador do campo de Einstein-Hilbert-Chern-Simons (gravitação topologicamente massiva). Este último exemplo, além de centrar a discussão da associação campo - partícula no estudo do propagador, funciona como preâmbulo para uma questão tecnicamente mais elaborada que irá aparecer no capítulo seguinte, e que gira em torno da extensão de operadores de spin para campos

de natureza tensorial.

Finalmente, no Capítulo 3, encontra-se a contribuição original deste trabalho de tese: o cálculo do propagador para o campo de gravitação no caso em que ocorre uma quebra explícita da simetria de Lorentz. Esta questão foi levantada em recente trabalho por Jackiw e Pi [2], mas a derivação do cálculo do propagador do campo do gráviton ainda não havia sido trabalhada e apresentada na literatura. Antes de entrarmos diretamente nesta questão, revemos os detalhes do cálculo do propagador do campo de Maxwell, no caso de violação da simetria de Lorentz, pelo método dos projetores. Uma vez revisto este caso, algebricamente menos complicado que o caso gravitacional, procede-se ao trabalho de se calcular o propagador para o gráviton com simetria de Lorentz quebrada por termo topológico do tipo Chern-Simons, como proposto por Jackiw e Pi na referência acima citada. Os esforços concentram-se em torno da busca de um conjunto completo de operadores de spin que fecham uma álgebra multiplicativa, generalizando-se, assim, o clássico método de Barnes-Rivers para a elaboração de operadores de spin para campos tensoriais. Uma vez completada a extensão dos operadores tipo-projeção de Barnes-Rivers, o propagador do campo do gráviton pode ser derivado e a relação de dispersão que descreve a anisotropia na propagação dos grávitons, em presença de um fundo que viola a simetria de Lorentz, emerge na estrutura de pólos do propagador.

Concluindo-se, no Capítulo 4, propomos alguns encaminhamentos para desenvolvimentos futuros à luz dos resultados encontrados no Capítulo 3. Segue-se um Apêndice, onde são organizadas relações de dualidade no setor espacial de  $(1 + 2)$  dimensões.

# Capítulo 1

## Campos, Partículas e Simetrias de Calibre

Com o propósito de esclarecer detalhes sobre o conteúdo de partícula associado a um particular tipo de campo de calibre, discutiremos, neste capítulo, uma série de exemplos de sistemas onde a simetria de calibre, em conjunto com as equações clássicas de movimento, indicará o número de graus de liberdade físicos do campo em discussão, e assinalará a componente de spin associada ao quantum descrito pelo campo. Esta questão é relevante numa etapa ainda anterior ao programa de quantização.

É importante identificar as características da partícula física associada a um dado campo relativístico se a quantização do mesmo for efetuada pelo método canônico.

Passemos, então, a discutir algumas situações esclarecedoras.

## 1.1 O Campo de Maxwell

A Lagrangeana que descreve a dinâmica do campo de Maxwell é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}; \quad (1.1)$$

separando-se em componentes espaciais e temporais, a Lagrangiana assume a forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_i A_0 \partial^i A^0 + \partial_i A_0 \partial^0 A^i - \frac{1}{2}\partial_0 A_i \partial^0 A^i - \frac{1}{2}\partial_i A_j \partial^i A^j + \frac{1}{2}\partial_i A_j \partial^j A^i. \quad (1.2)$$

Fazendo a variação respeito de  $A_0$  e  $A_i$ , obtemos as equações de campo para as componentes espaciais e temporais do campo de Maxwell:

$$\nabla^2 A^0 + \partial_i \partial^0 A^i = 0. \quad (1.3)$$

Podemos expresar  $A^0$  como função de  $A^i$ :

$$A^0 = -(\nabla^2)^{-1} \partial^0 \partial_i A^i. \quad (1.4)$$

A equação de campo para as componentes espaciais fica

$$-\partial^i \partial^0 A_0 + \partial_0 \partial^0 A^i - \nabla^2 A^i - \partial_j \partial^i A^j = 0; \quad (1.5)$$

substituindo a expressão 1.4 para  $A^0$  em 1.5, obtemos

$$\square \theta_{ij} A^j = 0, \quad (1.6)$$

onde  $\theta_{ij}$  é o operador transverso, definido por

$$\theta_{ij} = \eta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}.$$

Vemos que o setor transverso de  $\vec{A}$  é dinâmico. Indo para o espaço dos momenta, é fácil ver que a função de Green apresenta um pólo de massa nula,

o que nos diz da presença de uma partícula de massa nula.

Vejamos agora, mais explicitamente, o papel da simetria de calibre na propagação dos graus de liberdade descritos pelo campo  $A^\mu$ .

Seja a transformação de calibre

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha. \quad (1.7)$$

Tomando a divergência da mesma, chega-se a:

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \square \alpha. \quad (1.8)$$

Podemos escolher  $\alpha = -\square^{-1} \partial_\mu A^\mu$ , então

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (1.9)$$

É sempre possível adotar um segundo campo de calibre tal que

$$\partial_\mu (A^\mu + \partial^\mu \beta) = 0. \quad (1.10)$$

Com a escolha de uma função harmônica,

$$\square \beta = 0, \quad (1.11)$$

da transformação para  $A^0$ ,

$$A'^0 = A^0 + \partial^0 \beta,$$

temos

$$\partial_0 A'^0 = \partial_0 A^0 + \partial_0 \partial^0 \beta. \quad (1.12)$$

Substituindo-se 1.11 nesta última equação, vemos que, se fixarmos

$\beta = -(\nabla^2)^{-1} \partial_0 A^0$ , então

$$\partial_0 A^0 = 0. \quad (1.13)$$

Aplicando-se 1.9 nesta última, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (1.14)$$

Usando-se 1.14 na eq. 1.3, conclui-se que

$$\nabla^2 A^0 = 0. \quad (1.15)$$

Na ausência de fontes externas, e com a condição de contorno de campo nulo no infinito, deduz-se então que

$$A^0 = 0. \quad (1.16)$$

Podemos ver, desta forma, que a simetria de calibre elimina qualquer possibilidade de dinâmica para o spin-0 (descrito pela componente escalar sob rotações,  $A_0$ ). De 1.14, vemos que a propagação da componente vetorial,  $\vec{A}$ , é puramente transversa, e que a simetria de calibre seleciona o spin que deve se propagar. Neste caso, o campo propaga partículas de spin-1 e massa nula, com dois graus de liberdade físicos.

## 1.2 O Campo de Kalb-Ramond

O campo de Kalb-Ramond é uma 2-forma de calibre e foi originalmente introduzido para descrever o processo de intermediação da interação entre objetos estendidos unidimensionais.

A Lagrangeana invariante de calibre que descreve a propagação deste tipo de campo é dada a seguir:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6} H_{\mu\nu\kappa} H^{\mu\nu\kappa}, \quad (1.17)$$

onde

$$H_{\mu\nu\kappa} = \partial_\mu B_{\nu\kappa} + \partial_\nu B_{\kappa\mu} + \partial_\kappa B_{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

sendo que a transformação de calibre associada ao campo será dada mais adiante.

Separando-se em componentes espaciais e temporais, a Lagrangeana assume a forma a seguir:

$$\mathcal{L} = -\tilde{b}_k \partial_0 \partial_0 \tilde{b}_k + 2\varepsilon_{ijk} \tilde{b}_k \partial_0 \partial_i b_j + \tilde{b}_i \partial_i \partial_j \tilde{b}_j - b_j \nabla^2 b_j + b_j \partial_i \partial_j b_i, \quad (1.19)$$

onde  $b_j = B_{0j}$  e  $\tilde{b}_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} B_{ij}$ .

É bom esclarecer que a notação  $\tilde{b}$  introduzida acima não designa o dual da componente  $b$ , mas indica uma outra componente vetorial associada à forma de calibre.

Fazendo-se a variação com respeito aos campos  $b_k$  e  $\tilde{b}_k$ , obtemos:

$$-2\partial_0 \partial_0 \tilde{b}_k + 2\varepsilon_{ijk} \partial_0 \partial_i b_j + \partial_k \partial_j \tilde{b}_j = 0, \quad (1.20)$$

$$2\varepsilon_{ijk} \partial_0 \partial_i \tilde{b}_k - 2\nabla^2 b_j + 2\partial_i \partial_j b_i = 0. \quad (1.21)$$

Desta última equação de campo, deduzimos que

$$b_j^T = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial_0 \partial_i \tilde{b}_k}{\nabla^2}, \quad (1.22)$$

onde  $b_j^T = (\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}) b_i$ . Isto já fixa que a componente transversa de  $b$  não se apresenta como grau de liberdade físico, pois é fixada em termos do campo  $\tilde{b}$ .

Levando-se em conta que  $\vec{b} = \vec{b}^T + \vec{b}^L$ , e substituindo-se em 1.20, obtemos

$$\square \tilde{b}_j^L = 0, \quad (1.23)$$

onde  $b_j^L = \frac{\partial_j \partial_k}{\nabla^2} b_k$ .

Este resultado já assinala uma diferença marcante em relação ao campo usual

de calibre, de caráter vetorial, pois é a componente longitudinal, e não a componente transversa, que fixa a relação de dispersão para o spin-1 descrito por  $\tilde{b}_i$ .

Abordaremos agora a questão da simetria de calibre, a fim de identificarmos os setores de natureza compensadora, ou seja, aqueles campos componentes que podem ser eliminados por convenientes escolhas dos parâmetros associados às transformações de calibre.

Seja a transformação de calibre imposta ao campo de Kalb-Ramond:

$$B'^{\mu\nu} = B^{\mu\nu} + \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu. \quad (1.24)$$

Tirando-se a quadri-divergência da mesma, obtém-se:

$$\partial_\mu B'^{\mu\nu} = \partial_\mu B^{\mu\nu} + \square \xi_T^\nu. \quad (1.25)$$

Tomando  $\xi_T^\nu = -\square^{-1} \partial_\mu B^{\mu\nu}$ , pode-se sempre impor que

$$\partial_\mu B^{\mu\nu} = 0. \quad (1.26)$$

Como no caso do campo de Maxwell, podemos efetuar uma transformação adicional de calibre que mantenha a condição anterior:

$$\partial_\mu (B^{\mu\nu} + \partial^\mu \alpha^\nu - \partial^\nu \alpha^\mu) = 0. \quad (1.27)$$

Isto é possível desde que o novo parâmetro de calibre,  $\alpha^\mu$ , seja uma função vetorial harmônica e satisfaça a condição de quadri-divergência nula como especificado pelas equações abaixo:

$$\square \alpha_T^\nu = 0, \quad (1.28)$$

e

$$\partial_\nu \alpha^\nu = 0. \quad (1.29)$$

Com isto,

$$\begin{aligned}\partial_0 B'^{0i} &= \partial_0 B^{0i} + \partial_0 \partial^0 \alpha^i - \partial_0 \partial^i \alpha^0 \\ &= \partial_0 B^{0i} - \nabla^2 \theta^{ij} \alpha_j.\end{aligned}\tag{1.30}$$

Escolhendo-se  $\alpha_T^i = -(\nabla^2)^{-1} \partial_0 B^{0i}$ , obtemos:

$$\partial_0 B^{0i} = 0,\tag{1.31}$$

$$\partial_j B^{ji} = 0;\tag{1.32}$$

esta segunda condição é consequência do calibre  $\partial_\mu B^{\mu\nu} = 0$ , com  $\nu = i$ .

Vemos, assim, que a simetria de calibre elimina qualquer possibilidade de dinâmica para o campo  $b_i = B_{0i}$ , e também nos assegura o caráter escalar do campo  $\tilde{b}_i$ , já que, de  $\partial_j B^{ji} = 0$ , temos que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\tilde{b}} = \vec{0}\tag{1.33}$$

e, por conseguinte, este vetor pode ser escrito localmente como o gradiente de uma função escalar:

$$\vec{\tilde{b}} = \vec{\nabla} S.\tag{1.34}$$

Esta análise ilustra como o uso das equações de campo, conjugado à liberdade de escolha de calibre, reduz drasticamente o número de graus de liberdade físicos da 2-forma de calibre, que propaga um único grau de liberdade na camada de massa.

### 1.3 O Campo de Maxwell-Kalb-Ramond

Nesta seção, propomos um acoplamento entre o campo de Maxwell e a 2-forma de Kalb-Ramond, o que nos ilustrará como as duas simetrias de calibre inerentes a estes campos definem, em conjunção com as equações de

campo, a presença de um quantum massivo de spin-1, com graus de liberdade distribuídos entre os dois campos envolvidos, como ficará claro a seguir.

Consideramos para isto a Lagrangeana abaixo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{6}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu B_{\kappa\lambda}. \quad (1.35)$$

Já tínhamos visto que a propagação do campo de Maxwell é transversal e a propagação do campo de Kab-Ramond é longitudinal. É conveniente, então, expressar a Lagrangeana em componentes trasversais e longitudinais dos campos componentes. Com isto, a Lagrangeana assume a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\partial_t A_i^L \partial_t A_i^L + \frac{1}{2}\partial_t A_i^T \partial_t A_i^T + \frac{1}{2}\partial_i A_0 \partial_i A_0 + \partial_0 A_i^L \partial_i A_0 - \frac{1}{2}\partial_i A_j^T \partial_i A_j^T \\ & - \tilde{b}_k^L \partial_t^2 \tilde{b}_k^L - \tilde{b}_k^T \partial_t^2 \tilde{b}_k^T - 2\varepsilon_{ijk} \partial_t \tilde{b}_k^T \partial_i b_j^T - b_j^T \nabla^2 b_j^T + \tilde{b}_j^L \nabla^2 \tilde{b}_j^L + \mu A_0 \partial_i \tilde{b}_i^L \\ & + \mu A_i^L \partial_t \tilde{b}_i^L + \mu A_i^T \partial_t \tilde{b}_i^T - \mu \varepsilon_{ijk} A_i^T \partial_j b_k^T. \end{aligned} \quad (1.36)$$

As variações com respeito às componentes  $A_0$ ,  $A_i^L$ ,  $A_i^T$ ,  $\tilde{b}_i^L$ ,  $\tilde{b}_i^T$  e  $b_k^T$  geram respectivamente as equações de campo:

$$A_0 = \frac{1}{\nabla^2}(-\partial_i \partial_t A_i^L + \mu \partial_i \tilde{b}_i^L), \quad (1.37)$$

$$-\partial_i \partial_t A_0 - \partial_t^2 A_i^L + \mu \partial_i \tilde{b}_i^L = 0, \quad (1.38)$$

$$-\square A_i^T + \mu \partial_t \tilde{b}_i^T - \mu \varepsilon_{ijk} \partial_j b_k^T = 0, \quad (1.39)$$

$$b_k^T = -\frac{1}{\nabla^2} \varepsilon_{ijk} \partial_i (\partial_t \tilde{b}_j^T + \frac{\mu}{2} A_j^T), \quad (1.40)$$

$$-\partial_t^2 \tilde{b}_k^T + 2\varepsilon_{ijk} \partial_t \partial_i b_j^T - \mu \partial_t A_k^T = 0, \quad (1.41)$$

$$-\partial_t^2 \tilde{b}_k^L + \partial_i \partial_k \tilde{b}_i^L - \mu \partial_k A_0 - \mu \partial_t A_k^L = 0. \quad (1.42)$$

Do sistema acima, e com uso dos parâmetros associados às transformações de calibre, podemos mostrar, como discutido nas seções anteriores, que as componentes físicas que sobrevivem às fixações de calibre satisfazem às equações

de onda que seguem:

$$(\square + \frac{\mu^2}{2})A_i^T = 0, \quad (1.43)$$

$$(\square + \frac{\mu^2}{2})\tilde{b}_k^L = 0. \quad (1.44)$$

Estes resultados indicam a presença de uma partícula massiva com 2 graus de liberdade alocados na componente transversa do vetor  $\vec{A}$  e 1 grau de liberdade propagado pela componente longitudinal do vetor  $\vec{b}$ . O balanço final é que o sistema de campos acima descreve uma partícula massiva de natureza vetorial, sem o preço de introduzir massa por mecanismo de quebra de simetria. Deve ficar claro, entretanto, que estamos tratando de campos Abelianos.

## 1.4 O Campo de Einstein-Hilbert

Finalizamos este capítulo discutindo os detalhes relativos ao campo de calibre tensorial simétrico de rank-2, e veremos como a componente de spin-2 resulta ser o modo físico que se propaga, sendo as demais componentes espúrias (spin-1, spin-0) eliminadas com o auxílio da simetria de calibre e das próprias equações dinâmicas.

A Lagrangeana que descreve a dinâmica do campo de gravitação é a celebrada Lagrangeana de Einstein-Hilbert:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\mathcal{R}, \quad (1.45)$$

que, em sua já conhecida forma linearizada, lê-se como segue:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}h_{\mu\nu}\square h^{\mu\nu} - \frac{1}{4}h_\alpha^\alpha\square h_\beta^\beta + \frac{1}{2}h_\alpha^\alpha\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\partial_\mu\partial^\lambda h_{\lambda\nu}. \quad (1.46)$$

Separando-se em componentes espaciais e temporais, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{2}h\tilde{\nabla}^2h_0^0 + \frac{1}{4}h_{ij}\square h^{ij} - \frac{1}{4}h\partial_0\partial^0h - \frac{1}{4}h\tilde{\nabla}^2h + h\partial_0\partial_i h^{0i} \\
& + \frac{1}{2}h_0^0\partial_i\partial_j h^{ij} + \frac{1}{2}h\partial_i\partial_j h^{ij} - h^{0j}\partial_0\partial^i h_{ij} - \frac{1}{2}h^{ij}\partial_i\partial^k h_{kj} \\
& - \frac{1}{2}h^{i0}\partial_i\partial_j h_{j0} + \frac{1}{2}h^{i0}\tilde{\nabla}^2h_{i0}, \tag{1.47}
\end{aligned}$$

onde  $h = h^i{}_i$  e  $\tilde{\nabla}^2 = \partial^i\partial_i$ .

Fazendo-se a variação com respeito aos campos  $h_0^0$ ,  $h_{0i}$ ,  $h_{ij}$  e  $h$ , chegamos às equações de campo:

$$-\frac{1}{2}\tilde{\nabla}^2h + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j h^{ij} = 0, \tag{1.48}$$

$$\tilde{\nabla}^2h^{0i} + \partial^i\partial^0h - \partial^i\partial_j h^{j0} - \partial_j\partial^0h^{ij} = 0, \tag{1.49}$$

$$\square h^{ij} + \partial^i\partial^j h_0^0 + \partial^i\partial^j h - \partial^i\partial_0 h^{0j} - \partial^j\partial_0 h^{0i} - \partial^i\partial_k h^{kj} + \partial^j\partial_k h^{ki} = 0, \tag{1.50}$$

$$-\tilde{\nabla}^2h_0^0 - \square h + 2\partial_0\partial_i h^{0i} + \partial_i\partial_j h^{ij} = 0. \tag{1.51}$$

Substituindo 1.48 em 1.51, podemos expressar a componente puramente temporal como abaixo:

$$h_0^0 = \frac{1}{\tilde{\nabla}^2}(2\partial_0\partial_i h^{0i} - \partial_0\partial^0\frac{\partial_i\partial_j}{\tilde{\nabla}^2}h^{ij}). \tag{1.52}$$

Levando-se agora 1.48 em 1.49, obtemos:

$$h^{0i} - \frac{\partial^i\partial_j}{\tilde{\nabla}^2}h^{j0} = \frac{\partial_l\partial^0}{\tilde{\nabla}^2}(h^{il} - \frac{\partial^i\partial_k}{\tilde{\nabla}^2}h^{kl}). \tag{1.53}$$

Substituindo-se 1.48 e 1.52 na eq. 1.50, e usando 1.53, podemos escrever:

$$\square\theta^i{}_k\theta^j{}_l h^{kl} = 0. \tag{1.54}$$

Através da eq. 1.48, podemos observar que a componente que se propaga,  $\theta^i{}_k\theta^j{}_l h^{kl}$ , tem traço nulo. Então, é conveniente expressar 1.54 da seguinte forma:

$$\square h_{ij}^{TT} = 0, \tag{1.55}$$

onde

$$h_{ij}^{TT} = \theta_i^k \theta_j^l h_{kl} - \frac{1}{D-2} \theta_{ij} \theta^{kl} h_{kl}. \quad (1.56)$$

Vejamos a seguir o papel da simetria de calibre na eliminação de componentes compensadoras do campo estudado. Sabendo-se que o campo  $h_{\mu\nu}$  está sujeito à transformação de calibre abaixo:

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu, \quad (1.57)$$

então

$$h'^\alpha_\alpha = h^\alpha_\alpha + 2\partial_\mu \xi^\mu. \quad (1.58)$$

Podemos escolher  $\xi^\nu = -\frac{1}{\square} \partial_\mu (h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h^\alpha_\alpha)$ , o que assegura a condição de calibre:

$$\partial_\mu (h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h^\alpha_\alpha) = 0. \quad (1.59)$$

Efetuando-se uma transformação de calibre adicional,

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \partial^\mu \beta^\nu + \partial^\nu \beta^\mu, \quad (1.60)$$

com parâmetro de calibre harmônico, a condição de calibre acima se mantém para  $h'^{\mu\nu}$ :

$$\square \beta^\nu = 0, \quad (1.61)$$

e

$$\partial_\mu (h'^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h'^\alpha_\alpha) = 0. \quad (1.62)$$

Derivando-se em relação ao tempo a transformação de calibre com parâmetro  $\beta^0$ , temos

$$\partial_0 h'^{00} = \partial_0 h^{00} + 2\partial_0 \partial^0 \beta^0. \quad (1.63)$$

Usando-se, 1.61, podemos fixar  $\beta^0 = \frac{1}{2\square} \partial_0 h^{00}$ . Então,

$$\partial_0 h'^{00} = 0. \quad (1.64)$$

Para a componente  $h^{0i}$

$$\partial_0 h^{0i} = \partial_0 h^{0i} + \partial_0 \partial^0 \beta^i + \partial^i \partial_0 \beta^0. \quad (1.65)$$

Escolhendo-se  $\beta^i = -\frac{1}{\nabla^2}(\partial_0 \partial^i \beta^0 + \partial_0 h^{0i})$ , resulta que

$$\partial_0 h^{0i} = 0. \quad (1.66)$$

Observamos que a simetria de calibre descarta a possibilidade de dinâmica para os campos  $h^{00}$  e  $h^{0i}$ . Disto, e de 1.62, podemos escrever que

$$\partial_i h^{0i} = \frac{1}{2} \partial^0 h, \quad (1.67)$$

e

$$\partial_j h^{ij} = \frac{1}{2} \partial^i h^0_i + \frac{1}{2} \partial^i h. \quad (1.68)$$

Substituindo-se estas duas últimas expressões nas equações de campo para  $h^{00}$ ,  $h^{0i}$  e  $h^{ij}$ , chegamos finalmente aos resultados:

$$h^{00} = 0, \quad (1.69)$$

$$h^{0i} = 0 \quad (1.70)$$

e

$$\square h^{ij} = 0. \quad (1.71)$$

Fazendo uso das equações de campo junto com estes resultados é fácil mostrar que:

$$\nabla^2 h^\alpha_\alpha = 0, \quad (1.72)$$

daqui

$$h^\alpha_\alpha = 0, \quad (1.73)$$

o que resulta

$$h = 0. \quad (1.74)$$

Novamente, vemos que o calibre seleciona o spin que o campo propaga, e as equações de movimento determinam a relação de dispersão associada à propagação da componente de spin selecionada. Neste caso, o campo propaga partículas de spin-2, e a propagação é puramente transversa.

Neste capítulo, apresentamos alguns exemplos de campos de calibre em 4 dimensões espaço-temporais, e procuramos compreender os detalhes relativos ao papel marcante da simetria de calibre no processo de selecionar as componentes de spin que definem os modos físicos de propagação. Esta questão é de fundamental importância à medida em que aparecem campos tensoriais de calibre com ranks mais elevados.

Em seguida, no Capítulo 2, apresentaremos uma discussão semelhante, porém em 1+2 dimensões, onde aparecem peculiaridades marcantes como, por exemplo, a possibilidade de existência de campos de calibre massivos sem recurso a mecanismos de quebra de simetria.

## Capítulo 2

# Aspectos Peculiares da Relação Campos - Partículas - Simetrias em $(1+2)D$ .

Em 3 dimensões espaço-temporais, a simetria de calibre adquire uma propriedade bastante singular: Deixa de ser conflitante com a presença de um quantum de massa não-nula.

Nos principais exemplos considerados, será discutida a possibilidade de interação eletromagnética e de interação gravitacional mediadas por bósons massivos mantendo exata a simetria de calibre correspondentes a cada caso.

Passemos a considerar os casos de interesse.

## 2.1 O Campo de Maxwell-Chern-Simons

A Lagrangeana que descreve o Eletromagnetismo com massa topológica é dado por[4]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mu \varepsilon^{\mu\nu\kappa} A_\mu \partial_\nu A_\kappa. \quad (2.1)$$

Separando-se em componentes temporais e espaciais, temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}\partial_0 A_i \partial^0 A^i + \partial_0 A_i \partial^i A^0 - \frac{1}{2}\partial_i A_0 \partial^i A^0 - \frac{1}{2}\partial_i A_j \partial^i A^j + \frac{1}{2}\partial_i A_j \partial^j A^i \\ & + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{0ij}(A_0 \partial_i A_j - A_i \partial_0 A_j + A_i \partial_j A_0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Escrevendo-se as equações de campo para  $A_0$  e  $A_i$ , temos que:

$$A_0 = -\frac{1}{\nabla^2}(\partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu \varepsilon_{ij} \partial_i A_j), \quad (2.3)$$

$$\partial_t^2 A_i + \partial_t \partial_i A_0 - \nabla^2 A_i + \partial_i \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu \varepsilon_{ij}(\partial_j A_0 + \partial_t A_j) = 0. \quad (2.4)$$

Levando-se 2.3 em 2.4, obtemos:

$$\square A_i - \square \omega_{ij} A_j + \mu \partial_t \tilde{A}_i - \mu \partial_t \omega_{ij} \tilde{A}_j - \mu \partial_t \tilde{\omega}_{ij} \tilde{A}_j - \mu^2 \omega_{ij} A_j + \mu^2 A_i = 0, \quad (2.5)$$

onde os duais são definidos como segue:

$$\tilde{A}_i = \varepsilon_{ij} A_j$$

$$\tilde{\partial}_i = \varepsilon_{ij} \partial_j.$$

No Apêndice A, reunimos uma série de relações algébricas úteis para o cálculo vetorial em duas dimensões espaciais. Através de algumas destas relações, pode-se mostrar as seguintes identidades envolvendo a operação de dualidade para as componentes longitudinal e transversa de um dado vetor:

$$\tilde{A}^T = (\tilde{A})_L, \quad (2.6)$$

$$\widetilde{A}^L = (\widetilde{A})_T. \quad (2.7)$$

Com o auxílio das mesmas, pode-se mostrar que 2.5 simplifica-se, assumindo a forma abaixo:

$$(\square + \mu^2)A_T = 0. \quad (2.8)$$

Isto assegura que o campo de Maxwell-Kalb-Ramond descreve uma partícula massiva com setor físico transverso, o que, em 3 dimensões espaço-temporais, corresponde a 1 grau de liberdade físico.

## 2.2 Campo de Kalb-Ramond

Devido à relação de dualidade ligada ao campo de Kalb-Ramond em três dimensões, vamos trabalhar este exemplo com o propósito de ilustrar uma situação bastante particular em relação ao caso quadri-dimensional; a existência de um campo de calibre vetorial para o qual a componente longitudinal é invariante de calibre, enquanto que a sua componente transversa pode ser eliminada por uma adequada escolha de calibre. Este campo possui, então, a sua componente transversa como modo compensador.

Será visto que, numa formulação fora da camada de massa, o campo apresenta apenas a sua componente longitudinal, que sobrevive às fixações de calibre. Entretanto, serão as equações de Euler-Lagrange a eliminar o caráter dinâmico desta componente longitudinal. Assim, o campo de Kalb-Ramond não resulta associado a graus de liberdade físicos em 3 dimensões espaciotemporais.

A Lagrangeana é aquela já apresentada anteriormente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6} H_{\mu\nu\kappa} H^{\mu\nu\kappa}. \quad (2.9)$$

Decompondo-se em componentes espaciais e temporais, fica dada por:

$$\mathcal{L} = -\phi\partial_0\partial_0\phi - 2b_j\nabla^2 b_j + 2b_j\partial_i\partial_j b_i + 4\varepsilon_{ij}\phi\partial_0\partial_i b_j, \quad (2.10)$$

onde  $B_{ij} = \varepsilon_{ij}\phi$  e  $B_{0i} = b_i$ .

Derivando-se as equações de campo, temos:

$$-\partial_0\partial_0\phi + \varepsilon_{ij}\partial_0\partial_i b_j = 0 \quad (2.11)$$

e

$$-\nabla^2 b_j^T + \varepsilon_{ij}\partial_i\phi = 0. \quad (2.12)$$

Fica claro que a parte transversa do campo  $\vec{b}$  é fixada pelo campo  $\phi$ . Se substituirmos a parte transversa na primeira equação, não obtemos nenhuma equação que possa descrever a dinâmica do campo  $\phi$ . Este resultado fica melhor explicitado se observarmos que a 2-forma de calibre é dual de um vetor, por estarmos trabalhando em (1+2) dimensões.

$$B_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\kappa}C^\kappa, \quad (2.13)$$

o que leva à seguinte transformação de calibre para o dual:

$$C'_\mu = C_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\kappa}\partial^\nu\xi^\kappa. \quad (2.14)$$

Neste caso, a componente transversa do campo  $C^\mu$  faz o papel de modo compensador, podendo ser eliminada pela condição de calibre

$$\varepsilon^{\mu\nu\kappa}\partial_\nu C_\kappa = 0, \quad (2.15)$$

enquanto sua componente longitudinal é o modo invariante de calibre:

$$\partial_\mu C'^\mu = \partial_\mu C^\mu. \quad (2.16)$$

A equação de campo

$$\partial_\mu H^{\mu\nu\kappa} = 0, \quad (2.17)$$

junto ao fato de que

$$H_{\mu\nu\kappa} = \varepsilon_{\mu\nu\kappa} \partial_\alpha C^\alpha, \quad (2.18)$$

conduz ao resultado

$$\partial_\mu \partial_\nu C^\nu = 0, \quad (2.19)$$

o que elimina finalmente a componente longitudinal de  $C^\mu$ , já que  $\partial_\nu C^\nu$  resulta ser constante no tempo e homogênea no espaço, ou seja, sem caráter dinâmico. Em conclusão, a condição de calibre e as equações de campo mostram que o campo de Kalb-Ramond em 3 dimensões perde seu caráter dinâmico.

## 2.3 O Campo de Einstein-Hilbert-Chern-Simons

A Lagrangeana que descreve a gravitação topologicamente massiva em (2+1) dimensões é dada por[4]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa^2} \sqrt{-g} \mathcal{R} + \frac{1}{\mu} \varepsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho (\partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\sigma + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\varphi}^\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\varphi). \quad (2.20)$$

Na aproximação de campo fraco:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} h^{\alpha\beta} \square h_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} h_\alpha^\alpha \square h_\beta^\beta + \frac{1}{2} h_\alpha^\alpha \partial_\beta \partial_\gamma h^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\gamma h^\gamma_\beta + \\ & + \frac{\kappa^2}{2\mu} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (h_\gamma^\delta \square \partial_\alpha h_{\delta\beta} - h_\gamma^\delta \partial_\alpha \partial_\lambda \partial_\delta h^\lambda_\beta). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Para o estudo dos aspectos relativos à partícula associada a este campo, procederemos ao estudo do propagador, usando os operadores de Barnes-Rivers, neste caso estendidos para a gravitação topologicamente massiva [5].

A razão de adotarmos este procedimento é que desejamos desenvolver alguns aspectos técnicos relativos à busca de operadores generalizados de spin, ampliando a idéia de Barnes-Rivers[6]. No caso que consideraremos em quatro dimensões (capítulo seguinte), onde o procedimento algebrico é bastante mais complicado, a experiência adquirida com este exemplo em três dimensões será de grande auxílio.

Com os operadores usuais de Barnes-Rivers e o operador associado ao termo de massa topológica, construímos uma álgebra multiplicativa e não-comutativa, onde aparecem os operadores listados abaixo:

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\theta_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\theta_{\nu\kappa}) - \frac{1}{3}\theta_{\mu\kappa}\theta_{\kappa\lambda} \quad (2.23)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda} + \theta_{\nu\lambda}\omega_{\mu\kappa}) \quad (2.24)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} = \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda} \quad (2.25)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-\omega)} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda} \quad (2.26)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s\omega)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda} \quad (2.27)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-\omega s)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda} \quad (2.28)$$

$$S_1{}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = -\frac{\square}{4}(\varepsilon_{\mu\alpha\lambda}\partial_{\kappa}\omega_{\nu}^{\alpha} + \varepsilon_{\mu\alpha\kappa}\partial_{\lambda}\omega_{\nu}^{\alpha} + \varepsilon_{\nu\alpha\lambda}\partial_{\kappa}\omega_{\mu}^{\alpha} + \varepsilon_{\nu\alpha\kappa}\partial_{\lambda}\omega_{\mu}^{\alpha}) \quad (2.29)$$

$$S_2{}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{\square}{4}(\varepsilon_{\mu\alpha\lambda}\eta_{\kappa\nu} + \varepsilon_{\mu\alpha\kappa}\eta_{\lambda\nu} + \varepsilon_{\nu\alpha\lambda}\eta_{\kappa\mu} + \varepsilon_{\nu\alpha\kappa}\eta_{\lambda\mu}), \quad (2.30)$$

que constituem uma álgebra fechada:

$$P^{(2)}P^{(2)} = P^{(2)} + \frac{1}{3}(D-4)P^{(0-s)} \quad (2.31)$$

$$P^{(1)}P^{(1)} = P^{(1)} \quad (2.32)$$

$$P^{(2)}P^{(0-s)} = \frac{1}{3}(4-D)P^{(0-s)} \quad (2.33)$$

$$P^{(0-s)}P^{(2)} = \frac{1}{3}(4-D)P^{(0-s)} \quad (2.34)$$

$$P^{(2)}P^{(0-s\omega)} = \frac{1}{3}(4-D)P^{(0-s\omega)} \quad (2.35)$$

$$P^{(0-\omega s)}P^{(2)} = \frac{1}{3}(4-D)P^{(0-\omega s)} \quad (2.36)$$

$$P^{(0-s)}P^{(0-s)} = \frac{1}{3}(D-1)P^{(0-s)} \quad (2.37)$$

$$P^{(0-\omega)}P^{(0-\omega)} = P^{(0-\omega)} \quad (2.38)$$

$$P^{(0-s)}P^{(0-s\omega)} = \frac{1}{3}(D-1)P^{(0-s\omega)} \quad (2.39)$$

$$P^{(0-\omega s)}P^{(0-s)} = \frac{1}{3}(D-1)P^{(0-\omega s)} \quad (2.40)$$

$$P^{(0-s\omega)}P^{(0-\omega)} = P^{(0-s\omega)} \quad (2.41)$$

$$P^{(0-\omega)}P^{(0-\omega s)} = P^{(0-\omega s)} \quad (2.42)$$

$$P^{(0-s\omega)}P^{(0-\omega s)} = P^{(0-s)} \quad (2.43)$$

$$P^{(0-\omega s)}P^{(0-s\omega)} = \frac{1}{3}(D-1)P^{(0-\omega)} \quad (2.44)$$

$$(2.45)$$

e

$$S_2S_2 = \square^3\left(\frac{1}{2}P^{(0-s)} - \frac{1}{4}P^{(1)} - P^{(2)}\right) \quad (2.46)$$

$$S_2S_1 = \frac{1}{4}\square^3P^{(1)} \quad (2.47)$$

$$S_1S_2 = \frac{1}{4}\square^3P^{(1)} \quad (2.48)$$

$$S_1S_1 = \frac{1}{4}(-\square^3)P^{(1)} \quad (2.49)$$

$$S_1P^{(1)} = S_1 \quad (2.50)$$

$$P^{(1)}S_1 = S_1 \quad (2.51)$$

$$S_2P^{(2)} = S_2 + S_1 \quad (2.52)$$

$$P^{(2)}S_2 = S_2 + S_1 \quad (2.53)$$

$$S_2P^{(1)} = -S_1 \quad (2.54)$$

$$P^{(1)}S^2 = -S_1, \quad (2.55)$$

onde deveremos fazer  $D=3$ .

Introduzindo o termo de fixação de calibre de De Donder na Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{g.f.} = \frac{1}{2\alpha} F_\mu F^\mu, \quad (2.56)$$

onde

$$F_\mu[h_{\rho\sigma}] = \partial_\lambda \left( h^\lambda{}_\mu - \frac{1}{2} \delta^\lambda{}_\mu h^\nu{}_\nu \right), \quad (2.57)$$

esta pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} O_{\mu\nu,\kappa\lambda} h^{\kappa\lambda}, \quad (2.58)$$

sendo

$$O_{\mu\nu\kappa\lambda} = \left\{ \square \left( \frac{1}{2} P^{(2)} + \frac{1}{2\alpha} P^{(1)} - \frac{(4\alpha - 3)}{4\alpha} P^{(0-s)} + \frac{1}{4\alpha} P^{(0-\omega)} - \frac{\sqrt{3}}{4\alpha} P^{(0-s\omega)} - \frac{\sqrt{3}}{4\alpha} P^{(0-\omega s)} \right) + \frac{4\kappa^2}{\mu} (S_1 + S_2) \right\}_{\mu\nu,\kappa\lambda}. \quad (2.59)$$

Mediante uso da tabela multiplicativa acima, forma-se um sistema de oito equações, o qual, uma vez resolvido, leva à expressão do propagador:

$$\langle T[h_{\mu\nu}(x)h_{\kappa\lambda}(y)] \rangle = iO_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{-1} \delta^3(x - y) \quad (2.60)$$

então

$$\begin{aligned} \langle T[h_{\mu\nu}(x)h_{\kappa\lambda}(y)] \rangle &= \frac{1}{\square} \left( \frac{2(\mu/\kappa^2)^2}{(\mu/\kappa^2)^2 + 64\square} P^{(2)} + 2\alpha P_m^{(1)} - \frac{4[(\mu/\kappa^2)^2 + 48\square]}{(\mu/\kappa^2)^2 + 64\square} P_s^{(0)} \right. \\ &\quad + 4(\alpha - 1)P_w^{(0)} - 2\sqrt{3}P_{sw}^{(0)} - 2\sqrt{3}P_{ws}^{(0)} - \\ &\quad \left. - \frac{16(\mu/\kappa^2)}{\square[(\mu/\kappa^2)^2 + 64\square]} (S_1 + S_2) \right)_{\mu\nu,\kappa\lambda} \delta^3(x - y) \quad (2.61) \end{aligned}$$

A presença de um pólo massivo indica a existência de um quantum massivo para o campo de gravitação. Este exemplo será o ponto de partida para o estudo do campo do gráviton a ser considerado no capítulo subsequente, onde será considerada uma teoria de gravitação com a presença de um termo que realiza a quebra da simetria de Lorentz.

## Capítulo 3

# Propagação de Campos de Calibre em Modelos com Quebra da Simetria de Lorentz

A Teoria da Relatividade Especial está firmemente estabelecida no panorama descrito pela Física atual, e é experimentalmente confirmada sem nenhuma exceção. Contudo, o desenvolvimento da tecnologia de alta precisão leva-nos a indagar se este princípio é apenas aproximadamente verdadeiro ou se poderíamos ter um mecanismo que o violasse.

As simetrias são um guia fundamental quando se pretende iniciar o estudo das invariâncias de uma teoria. A Teoria Quântica de Campos apresenta duas importantes simetrias: uma relacionada com a invariância de Lorentz e outra relacionada com a invariância chamada CPT, propriedades estas que também são respeitadas pelo Modelo Padrão. A quebra destas simetrias sugere que pode haver uma teoria mais fundamental; pesquisas nesta direção são rotuladas como Física além do Modelo Padrão. Uma descrição do Mo-

delo Padrão incorporando estas duas quebras foi desenvolvida por Colladay e Kostelecky [7], e por Coleman e Glashow [8]. O termo que provoca estas violações é uma extensão natural do termo de Chern-Simons, proposta por Jackiw [1], que transforma a constante de acoplamento num quadrivetor. O termo, então, aparece na ação como:

$$I_{CS} = -\frac{1}{4} \int dx^4 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} v_\mu A_\nu F_{\alpha\beta}, \quad (3.1)$$

sendo que o quadrivetor  $v_\mu$  é dado por  $v_\mu = (m, \vec{v})$ .

As invariâncias de calibre e Lorentz são duas simetrias fundamentais da Eletrodinâmica de Maxwell. As propriedades da radiação eletromagnética, tanto as observadas na Natureza, como em laboratórios de altas energias são descritas por uma dinâmica que é invariante de Lorentz. A invariância de calibre em 4 dimensões está ligada ao fato do fóton não ter massa. Entretanto, o termo topológico acima introduz um parâmetro de massa e respeita a simetria de calibre, sempre que o vetor  $v^\mu$  for dado pelo gradiente de um escalar:

$$v_\mu = \partial_\mu \theta, \quad (3.2)$$

onde  $\theta$  é um campo escalar que não apresenta dinâmica. Vamos considerar o caso em que o vetor  $v_\mu$  seja constante.

A Lagrangeana que descreve o Electromagnetismo com quebra da simetia de Lorentz é dada por :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} v_\mu \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} A_\nu \partial_\kappa A_\lambda. \quad (3.3)$$

Realizando-se a separação espaço-tempo, temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (A_0 \tilde{\nabla}^2 A_0 + A_i \partial_0 \partial^0 A^i + A_i \tilde{\nabla}^2 A^i - 2A_0 \partial_i \partial^0 A^i - A_i \partial^i \partial_j A^j)$$

$$+\frac{1}{2}v_0\varepsilon^{0ijk}A_i\partial_jA_k + \frac{1}{2}v_i\varepsilon^{0ijk}(A_j\partial_0A_k - 2A_0\partial_jA_k). \quad (3.4)$$

Desta Lagrangeana, podemos obter as equações de campo:

$$\tilde{\nabla}^2 A_0 = \partial_i \partial^0 A^i + v_i \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k \quad (3.5)$$

e

$$\square A^i - \partial^i \partial_0 A^0 - \partial^i \partial_j A^j + v_0 \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k - v_j \varepsilon^{ijk} \partial_0 A_k - v_k \varepsilon^{ijk} \partial_j A_0 = 0. \quad (3.6)$$

Substituindo-se a primeira equação na segunda, obtemos:

$$\begin{aligned} \square A_T^i + v_k \varepsilon^{ijk} \partial_0 A_j^T - v_j \varepsilon^{jkl} \partial^0 \omega_k^i A_l + v_0 \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k + v_k v^i A_T^k - v^2 A_T^i + \\ + v_k v^j \omega_j^k A^i - v_k v^j \omega_j^i A^k = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para o caso particular onde  $\vec{v} = (m, \vec{0})$ , temos:

$$(\square \eta^{ik} + m \varepsilon^{ijk} \partial_j) A_k^T = 0. \quad (3.8)$$

Aplicando-se o operador conjugado, obtemos:

$$(\square^2 + m^2 \nabla^2) A_i^T = 0. \quad (3.9)$$

Para o caso em que  $\vec{v}$  é tipo-espaço, podemos escolher  $\vec{v}$  ao longo do eixo  $z$ ,  $v_j = v_3 \delta_j^3$ ; com isto, temos:

$$(\square \eta^{ij} + v_3 \varepsilon^{3ij} \partial_0 - v_3 \varepsilon^{3kj} \partial^0 \omega_k^i) A_j^T = 0. \quad (3.10)$$

Aplicando-se o operador conjugado, chegamos a:

$$(\square^2 + \square v^2 + v \cdot \vec{\nabla}) A_i^T = 0. \quad (3.11)$$

Vemos, assim, que a dinâmica do campo  $\vec{A}$  está no setor transversal, o papel do campo de calibre sendo o mesmo que no caso usual. A relação de dispersão para um  $v_\mu$  geral pode ser obtida através do cálculo do propagador.

Vamos realizá-lo usando os operadores de projeção de spin.

Vejamos que a Lagrangeana pode ser escrita da forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\mu O_{\mu\nu} A_\nu, \quad (3.12)$$

onde

$$O_{\mu\nu} = \square \left\{ \theta^{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha} \omega^{\mu\nu} - \frac{1}{\square} S_{\mu\nu} \right\}. \quad (3.13)$$

O termo de fixação de calibre já está incorporado com parâmetro  $\alpha$ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (3.14)$$

e

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \quad (3.15)$$

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \quad (3.16)$$

$$S^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} v_\kappa \partial_\lambda. \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

Para se derivar o propagador, é necessário introduzir dois novos operadores, de forma tal que constituam uma álgebra fechada; estes são:

$$\Sigma_{\mu\nu} = v_\mu \partial_\nu \quad (3.19)$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = v_\mu v_\nu. \quad (3.20)$$

É dada abaixo a álgebra destes operadores:

$$\theta_{\mu\alpha} \theta^{\alpha\nu} = \theta_\mu^\nu$$

$$\theta_{\mu\alpha} S^{\alpha\nu} = S_\mu^\nu$$

$$\theta_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha\nu} = \Lambda_\mu^\nu - \frac{(v \cdot \partial)}{\square} \Sigma_\mu^\nu$$

$$\theta_{\mu\alpha} \Sigma^{\alpha\nu} = \Sigma_\mu^\nu - (v \cdot \partial) \omega_\mu^\nu$$

$$\begin{aligned}
\omega_{\mu\alpha}\omega^{\alpha\nu} &= \omega_{\mu}^{\nu} \\
\omega_{\mu\alpha}\Lambda^{\alpha\nu} &= \frac{(v.\partial)}{\square}\Sigma_{\mu}^{\nu} \\
\omega_{\mu\alpha}\Sigma^{\alpha\nu} &= (v.\partial)\omega_{\mu}^{\nu} \\
\omega_{\mu\alpha}\Sigma^{\nu\alpha} &= \Sigma_{\mu}^{\nu} \\
S_{\mu\alpha}\theta^{\alpha\nu} &= S_{\mu}^{\nu} \\
S_{\mu\alpha}S^{\alpha\nu} &= [v^2\square - (v.\partial)^2]\theta_{\mu}^{\nu} - (v.\partial)^2\square\omega_{\mu}^{\nu} + (v.\partial)(\Sigma_{\mu}^{\nu} + \Sigma_{\mu}^{\nu}) - \square\Lambda_{\mu}^{\nu} = (S^2)_{\mu}^{\nu} \\
\Lambda_{\mu\alpha}\theta^{\alpha\nu} &= \Lambda_{\mu}^{\nu} - \frac{(v.\partial)}{\square}\Sigma_{\mu}^{\nu} \\
\Lambda_{\mu\alpha}\omega^{\alpha\nu} &= \frac{(v.\partial)}{\square}\Sigma_{\mu}^{\nu} \\
\Lambda_{\mu\alpha}\Lambda^{\alpha\nu} &= v^2\Lambda_{\mu}^{\nu} \\
\Lambda_{\mu\alpha}\Sigma^{\alpha\nu} &= v^2\Sigma_{\mu}^{\nu} \\
\Lambda_{\mu\alpha}\Sigma^{\nu\alpha} &= (v.\partial)\Lambda_{\mu}^{\nu} \\
\Sigma_{\mu\alpha}\omega^{\alpha\nu} &= \Sigma_{\mu}^{\nu} \\
\Sigma_{\mu\alpha}\Lambda^{\alpha\nu} &= (v.\partial)\Lambda_{\mu}^{\nu} \\
\Sigma_{\mu\alpha}\Sigma^{\alpha\nu} &= (v.\partial)\Sigma_{\mu}^{\nu} \\
\Sigma_{\mu\alpha}\Sigma^{\nu\alpha} &= \square\Lambda_{\mu}^{\nu} \\
\Sigma_{\alpha\mu}\theta^{\alpha\nu} &= \Sigma_{\mu}^{\nu} - (v.\partial)\omega_{\mu}^{\nu} \\
\Sigma_{\alpha\mu}\omega^{\alpha\nu} &= (v.\partial)\omega_{\mu}^{\nu} \\
\Sigma_{\alpha\mu}\Lambda^{\alpha\nu} &= v^2\Sigma_{\mu}^{\nu} \\
\Sigma_{\alpha\mu}\Sigma^{\alpha\nu} &= v^2\square\omega_{\mu}^{\nu} \\
\Sigma_{\alpha\mu}\omega^{\nu\alpha} &= (v.\partial)\Sigma_{\mu}^{\nu}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Podemos, finalmente, obter o propagador:

$$\begin{aligned}
\langle A_{\mu}(x)A_{\nu}(y) \rangle &= \frac{i}{\square} \left\{ \theta_{\mu\nu} + \alpha\omega_{\mu\nu} + \frac{\square S}{\square^2 - [v^2\square - (v.\partial)^2]} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{S^2}{\square^2 - [v^2\square - (v.\partial)^2]} \right\} \delta(x - y),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

que, no espaço dos momenta, assume a forma:

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = \frac{i}{k^2 D} \{ \theta_{\mu\nu} D + \alpha \omega_{\mu\nu} D - k^2 S + S^2 \}, \quad (3.23)$$

onde  $D = k^4 - v^2 k^2 + (v \cdot k)^2$  descreve a relação de dispersão para a propagação dos fótons em presença do campo de fundo que realiza a quebra da simetria de Lorentz. Esta relação de dispersão encontra-se estudada em detalhes no trabalho citado em [9].

### 3.1 Gravitação com Quebra da Simetria de Lorentz

Assim como no caso do Eletromagnetismo, estenderemos o mecanismo que se baseia num termo do tipo Chern-Simons para a quebra da simetria de Lorentz na gravitação. Esta questão foi introduzida e encontra-se devidamente motivada nos trabalhos coletados em [2]. Acrescentando-se um termo de Chern-Simons à Lagrangeana da gravitação usual:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} v_\mu \Gamma_{\lambda\sigma}{}^\rho (\partial_\nu \Gamma_{\rho\kappa}{}^\sigma + \frac{2}{3} \Gamma_{\nu\alpha}{}^\sigma \Gamma_{\kappa\rho}{}^\alpha), \quad (3.24)$$

a Lagrangeana que descreve a gravitação com quebra da simetria de Lorentz resulta dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa^2} \mathcal{R} - \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} v_\mu \Gamma_{\lambda\sigma}{}^\rho (\partial_\nu \Gamma_{\rho\kappa}{}^\sigma + \frac{2}{3} \Gamma_{\nu\alpha}{}^\sigma \Gamma_{\kappa\rho}{}^\alpha). \quad (3.25)$$

Adotando-se a aproximação de campo fraco, a Lagrangeana assume a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^\alpha{}_\alpha \square h^\beta{}_\beta + h^\alpha{}_\alpha \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h^\lambda{}_\lambda \right) + \\ & + \frac{1}{2\alpha} \left( -h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h^\lambda{}_\lambda + h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h^\alpha{}_\alpha - \frac{1}{4} h^\alpha{}_\alpha \square h^\beta{}_\beta \right) + \\ & + - \left[ \frac{k^2}{4} \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} v_\mu (h_\lambda{}^\rho \square \partial_\nu h_{\rho\kappa} - h_\lambda{}^\rho \partial_\nu \partial_\rho \partial_\sigma h^\sigma{}_\kappa) \right], \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde já se introduziu o termo de fixação de calibre de De Donder:

$$\mathcal{L}_{gf} = \frac{1}{2\alpha} F_\mu F^\mu, \quad (3.27)$$

onde

$$F_\mu = \partial_\nu \left( h^\nu_\mu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu h^\alpha_\alpha \right). \quad (3.28)$$

A este ponto, convém ressaltar que o cálculo do propagador do gráviton para este sistema ainda não se encontra publicado na literatura referente à área. Este cálculo constitui-se na contribuição original desta dissertação[12].

Como primeira etapa, tivemos que identificar, além dos 6 operadores de Barnes-Rivers, aqueles advindos da quebra da simetria de Lorentz: aparecem 24 novos operadores. A lista completa dos operadores é dada a seguir:

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\theta_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\theta_{\nu\kappa}) - \frac{1}{3}\theta_{\mu\kappa}\theta_{\kappa\lambda} \quad (3.29)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda} + \theta_{\nu\lambda}\omega_{\mu\kappa}) \quad (3.30)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} = \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda} \quad (3.31)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-\omega)} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda} \quad (3.32)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s\omega)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda} \quad (3.33)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-\omega s)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda} \quad (3.34)$$

$$S_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}S_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}S_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\kappa}S_{\mu\lambda} + \theta_{\nu\lambda}S_{\mu\kappa}) \quad (3.35)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1-a)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\Sigma_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\Sigma_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\kappa}\Sigma_{\mu\lambda} + \theta_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\kappa}) \quad (3.36)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1-b)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\Sigma_{\lambda\nu} + \theta_{\mu\lambda}\Sigma_{\kappa\nu} + \theta_{\nu\kappa}\Sigma_{\lambda\mu} + \theta_{\nu\lambda}\Sigma_{\kappa\mu}) \quad (3.37)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\Lambda_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\Lambda_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\kappa}\Lambda_{\mu\lambda} + \theta_{\nu\lambda}\Lambda_{\mu\kappa}) \quad (3.38)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(SL)} = \frac{1}{2}(S_{\mu\kappa}\Lambda_{\nu\lambda} + S_{\mu\lambda}\Lambda_{\nu\kappa} + S_{\nu\kappa}\Lambda_{\mu\lambda} + S_{\nu\lambda}\Lambda_{\mu\kappa}) \quad (3.39)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(S\Sigma-a)} = \frac{1}{2}(S_{\mu\kappa}\Sigma_{\nu\lambda} + S_{\mu\lambda}\Sigma_{\nu\kappa} + S_{\nu\kappa}\Sigma_{\mu\lambda} + S_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\kappa}) \quad (3.40)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(S\Sigma-b)} = \frac{1}{2}(S_{\mu\kappa}\Sigma_{\lambda\nu} + S_{\mu\lambda}\Sigma_{\kappa\nu} + S_{\nu\kappa}\Sigma_{\lambda\mu} + S_{\nu\lambda}\Sigma_{\kappa\mu}) \quad (3.41)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(S\omega)} = \frac{1}{2}(S_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + S_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa} + S_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda} + S_{\nu\lambda}\omega_{\mu\kappa}) \quad (3.42)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(\theta\Sigma-a)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{\mu\nu}\Sigma_{\kappa\lambda} \quad (3.43)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(\theta\Sigma-b)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{\mu\nu}\Sigma_{\lambda\kappa} \quad (3.44)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(\Sigma\theta)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Sigma_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda} + \Sigma_{\nu\mu}\theta_{\kappa\lambda}) \quad (3.45)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(\theta L)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{\mu\nu}\Lambda_{\kappa\lambda} \quad (3.46)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(L\theta)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda} \quad (3.47)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(L)} = \Lambda_{\mu\nu}\Lambda_{\kappa\lambda} \quad (3.48)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(\omega L-a)} = \omega_{\mu\lambda}\Lambda_{\nu\kappa} + \omega_{\nu\lambda}\Lambda_{\mu\kappa} \quad (3.49)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(\omega L-b)} = \omega_{\mu\kappa}\Lambda_{\nu\lambda} + \omega_{\nu\kappa}\Lambda_{\mu\lambda} \quad (3.50)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(\omega L)} = \omega_{\mu\nu}\Lambda_{\kappa\lambda} \quad (3.51)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(L\omega)} = \Lambda_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda} \quad (3.52)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\lambda\kappa}^{(\omega\Sigma-a)} = \omega_{\mu\nu}\Sigma_{\kappa\lambda} \quad (3.53)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\lambda\kappa}^{(\omega\Sigma-b)} = \omega_{\mu\nu}\Sigma_{\lambda\kappa} \quad (3.54)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\lambda\kappa}^{(\Sigma\omega)} = \Sigma_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda} + \Sigma_{\nu\mu}\omega_{\kappa\lambda} \quad (3.55)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\lambda\kappa}^{(L\Sigma-a)} = \Lambda_{\mu\nu}\Sigma_{\kappa\lambda} \quad (3.56)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\lambda\kappa}^{(L\Sigma-b)} = \Lambda_{\mu\nu}\Sigma_{\lambda\kappa} \quad (3.57)$$

$$\Pi_{\mu\nu,\lambda\kappa}^{(\Sigma L)} = \Sigma_{\mu\nu}\Lambda_{\kappa\lambda} + \Sigma_{\nu\mu}\Lambda_{\kappa\lambda}. \quad (3.58)$$

Podemos escrever a Lagrangeana como abaixo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}h_{\mu\nu}O^{\mu\nu\kappa\lambda}h_{\kappa\lambda}, \quad (3.59)$$

onde

$$O_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{\square}{2}P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} - \frac{\square}{2\alpha}P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} - \frac{(4\alpha + 3)\square}{4\alpha}P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{3}\square}{4\alpha} (P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s\omega)} + P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-\omega s)}) - \frac{\square}{4\alpha} P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-\omega)} - \frac{\kappa^2\square}{8} S_{\mu\nu,\kappa\lambda}. \\
& \hspace{15em} (3.60)
\end{aligned}$$

A álgebra destes operadores de projeção não será exibida completamente, por ser excessivamente extensa. É uma álgebra não-comutativa, o que nos levaria a escrever uma tabela onde apareceriam, em princípio, cerca de 1800 termos. Esta questão foi tratada com auxílio de computação algébrica.

Explicitamos abaixo uma parte da tabela multiplicativa para os operadores de spin (envolvendo os produtos dos usuais operadores de Barnes-Rivers pelos novos operadores de spin encontrados):

$$\begin{aligned}
P^{(2)}P^{(2)} &= P^{(2)} \\
P^{(2)}S &= S \\
P^{(2)}\Pi^{(1-a)} &= \Pi^{(1-a)} - (v.\partial)P^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{3}}(\Pi^{(\theta\Sigma-a)} + \Pi^{(\theta\Sigma-b)}) + \frac{2(v.\partial)}{\sqrt{3}}P^{(0-s\omega)} \\
P^{(2)}\Pi^{(2)} &= \Pi^{(2)} - \frac{\lambda}{\square}\Pi^{(1-b)} - \frac{2}{\sqrt{3}}\Pi^{(\theta L)} + \frac{(v.\partial)}{\sqrt{3}\square}(\Pi^{(\theta\Sigma-a)}\Pi^{(\theta\Sigma-b)}) \\
P^{(2)}\Pi^{(L\theta)} &= \Pi^{(L\theta)} - \frac{(v.\partial)}{\square}\Pi^{(\Sigma\theta)} + \frac{(v.\partial)^2}{\square}P^{(0-\omega s)} - \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\square})P^{(0-s)} \\
P^{(2)}\Pi^{(L)} &= \Pi^{(L)} - \frac{(v.\partial)}{\square}\Pi^{(\Sigma L)} + \frac{(v.\partial)^2}{\square}\Pi^{(\omega L)} - \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\square})\Pi^{(\theta L)} \\
P^{(2)}\Pi^{(L\omega)} &= \Pi^{(L\omega)} - \frac{(v.\partial)}{\square}\Pi^{(\Sigma\omega)} + \frac{(v.\partial)^2}{\square}P^{(0-\omega)} - \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\square})P^{(0-s\omega)} \\
P^{(2)}\Pi^{(L\Sigma-a)} &= \Pi^{(L\Sigma-a)} - (v.\partial)\Pi^{(\omega L-a)} + \frac{(v.\partial)^2}{\square}\Pi^{(\omega\Sigma-a)} - \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\square})\Pi^{(\theta\Sigma-a)} \\
P^{(2)}\Pi^{(L\Sigma-b)} &= \Pi^{(L\Sigma-b)} - (v.\partial)\Pi^{(\omega L-b)} + \frac{(v.\partial)^2}{\square}\Pi^{(\omega\Sigma-b)} - \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\square})\Pi^{(\theta\Sigma-b)} \\
P^{(1)}P^{(1)} &= P^{(1)} \\
P^{(1)}\Pi^{(1-a)} &= (v.\partial)P^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{(1)}\Pi^{(1-b)} &= \Pi^{(1-b)} \\
P^{(1)}\Pi^{(2)} &= \frac{(v.\partial)}{\square}\Pi^{(1-b)} \\
P^{(1)}\Pi^{(\Sigma\theta)} &= \Pi^{(\Sigma\theta)} - 2(v.\partial)P^{(0-\omega s)} \\
P^{(1)}\Pi^{(L\theta)} &= \frac{(v.\partial)}{\square}\Pi^{(\Sigma\theta)} - \frac{2(v.\partial)^2}{\square}P^{(0-\omega s)} \\
P^{(1)}\Pi^{(L)} &= \frac{(v.\partial)}{\square}\Pi^{(\Sigma L)} - \frac{2(v.\partial)^2}{\square}\Pi^{(\omega L)} \\
P^{(1)}\Pi^{(\omega L-b)} &= \Pi^{(\omega L-b)} - \frac{2(v.\partial)}{\square}\Pi^{(\omega\Sigma-b)} \\
P^{(1)}\Pi^{(\omega L-a)} &= \Pi^{(\omega L-a)} - \frac{2(v.\partial)}{\square}\Pi^{(\omega\Sigma-a)} \\
P^{(1)}\Pi^{(L\omega)} &= \frac{(v.\partial)}{\square}\Pi^{(\Sigma\omega)} - \frac{2(v.\partial)^2}{\square}P^{(0-\omega)} \\
P^{(1)}\Pi^{(\Sigma\omega)} &= \Pi^{(\Sigma\omega)} - 2\lambda P^{(0-\omega)} \\
P^{(1)}\Pi^{(\Sigma L)} &= \Pi^{(\Sigma L)} - 2\lambda\Pi^{(\omega L)} \\
P^{(1)}\Pi^{(L\Sigma-b)} &= (v.\partial)\Pi^{(\omega L-b)} - \frac{2(v.\partial)}{\square}\Pi^{(\omega\Sigma-b)} \\
P^{(0-s)}P^{(0-s)} &= P^{(0-s)} \\
P^{(0-s)}P^{(0-s\omega)} &= P^{(0-s\omega)} \\
P^{(0-s)}\Pi^{(1-a)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\Pi^{(\theta\Sigma-a)} + \Pi^{(\theta\Sigma-b)}) - \frac{2(v.\partial)}{\sqrt{3}}P^{(0-s\omega)} \\
P^{(0-s)}\Pi^{(1-b)} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\Pi^{(\theta L)} - \frac{(v.\partial)}{\sqrt{3}\square}(\Pi^{(\theta\Sigma-a)} + \Pi^{(\theta\Sigma-b)}) \\
P^{(0-s)}\Pi^{(\theta\Sigma-a)} &= \Pi^{(\theta\Sigma-a)} \\
P^{(0-s)}\Pi^{(\theta\Sigma-b)} &= \Pi^{(\theta\Sigma-b)} \\
P^{(0-s)}\Pi^{(L\theta)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)}{\square})P^{(0-s)} \\
P^{(0-s)}\Pi^{(L)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)}{\square})\Pi^{(\theta L)} \\
P^{(0-s)}\Pi^{(L\omega)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)}{\square})P^{(0-s\omega)} \\
P^{(0-s)}\Pi^{(L\Sigma-a)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{(v.\partial)}{\square})\Pi^{(\theta\Sigma-a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{(0-s)}\Pi^{(L\Sigma-b)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(v^2 - \frac{(v.\partial)}{\square}\right)\Pi^{(\theta\Sigma-b)} \\
P^{(0-\omega)}P^{(0-\omega)} &= P^{(0-\omega)} \\
P^{(0-\omega)}P^{(0-\omega s)} &= P^{(0-\omega s)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\Sigma\theta)} &= 2(v.\partial)P^{(0-\omega s)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(L\theta)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\square}P^{(0-\omega s)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(L)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\square}\Pi^{(\omega L)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\omega L-b)} &= \frac{2(v.\partial)}{\square}\Pi^{(\omega\Sigma-b)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\omega L-a)} &= \frac{2(v.\partial)}{\square}\Pi^{(\omega\Sigma-a)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\omega L)} &= \Pi^{(\omega L)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(L\omega)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\square}P^{(0-\omega)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\omega\Sigma-a)} &= \Pi^{(\omega\Sigma-a)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\omega\Sigma-b)} &= \Pi^{(\omega\Sigma-b)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\Sigma\omega)} &= 2(v.\partial)P^{(0-\omega)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(L\Sigma-a)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\square}\Pi^{(\omega\Sigma-a)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(L\Sigma-b)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\square}\Pi^{(\omega\Sigma-b)} \\
P^{(0-\omega)}\Pi^{(\Sigma L)} &= 2(v.\partial)\Pi^{(\theta L)} \\
P^{(0-s\omega)}P^{(0-\omega)} &= P^{(0-s\omega)} \\
P^{(0-s\omega)}P^{(0-\omega s)} &= P^{(0-s)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\Sigma\theta)} &= 2(v.\partial)P^{(0-s)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(L\theta)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\square}P^{(0-s)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(L)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\square}\Pi^{(\theta L)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\omega L-b)} &= \frac{2(v.\partial)}{\square}\Pi^{(\theta\Sigma-b)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\omega L-a)} &= \frac{2(v.\partial)}{\square}\Pi^{(\theta\Sigma-a)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\omega L)} &= \Pi^{(\theta L)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(L\omega)} &= \frac{2(v.\partial)^2}{\square}P^{(0-\omega s)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\omega\Sigma-a)} &= \Pi^{(\theta\Sigma-a)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\omega\Sigma-b)} &= \Pi^{(\theta\Sigma-b)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\Sigma\omega)} &= \frac{2(v.\partial)}{\square}P^{(0-s\omega)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\Sigma-a)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\square}\Pi^{(\theta\Sigma-a)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\Sigma-b)} &= \frac{(v.\partial)^2}{\square}\Pi^{(\theta\Sigma-b)} \\
P^{(0-s\omega)}\Pi^{(\Sigma L)} &= 2(v.\partial)\Pi^{(\theta L)} \\
P^{(0-\omega s)}P^{(0-s)} &= P^{(0-\omega s)} \\
P^{(0-\omega s)}P^{(0-s\omega)} &= P^{(0-\omega)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(1-a)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\Pi^{(\omega\Sigma-a)} + \Pi^{(\omega\Sigma-b)}) - \frac{2(v.\partial)}{\sqrt{3}}P^{(0-\omega)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(2)} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\Pi^{(\omega L)} - \frac{(v.\partial)}{\sqrt{3}\square}(\Pi^{(\omega\Sigma-a)} + \Pi^{(\omega\Sigma-b)}) \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(\theta\Sigma-a)} &= \Pi^{(\omega\Sigma-a)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(\theta\Sigma-b)} &= \Pi^{(\omega\Sigma-b)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(\theta L)} &= \Pi^{(\omega L)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(L\theta)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\square}\right)P^{(0-\omega s)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(L)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\square}\right)\Pi^{(\omega L)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(L\omega)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\square}\right)P^{(0-\omega)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(L\Sigma-a)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\square}\right)\Pi^{(\omega\Sigma-a)} \\
P^{(0-\omega s)}\Pi^{(L\Sigma-b)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(v^2 - \frac{(v.\partial)^2}{\square}\right)\Pi^{(\omega\Sigma-b)}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
SP^{(2)} &= S \\
SS &= 4[v^2\Box - (v.\partial)^2]P^{(2)} - 2[v^2\Box - (v.\partial)^2]P^{(0-s)} - 3(v.\partial)^2P^{(1)} + \\
&\quad -3\Box\Pi^{(2)} + 3(v.\partial)(\Pi^{(1-a)} + \Pi^{(1-b)}) + 2\sqrt{3}(v.\partial)^2(P^{(0-s\omega)} + P^{(0-\omega s)}) \\
&\quad -2\sqrt{3}(v.\partial)(\Pi^{(\theta\Sigma-a)} + \Pi^{(\theta\Sigma-b)} + \Pi^{(\Sigma\theta)}) + 2\sqrt{3}\Box(\Pi^{(\theta L)} + \Pi^{(L\theta)}).
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Para a obtenção do propagador, é necessário, adotando-se o método dos projetores, expandí-lo na base dos operadores encontrados. Este procedimento gera um sistema de 30 coeficientes a serem determinados. Isto é feito com o auxílio de um programa, e, após terem sido determinados os coeficientes, são feitas simplificações, conduzindo-nos à seguinte expressão para o propagador, já escrito no espaço dos momenta ( $p^\mu$  designa o momentum associado a este propagador):

$$\begin{aligned}
\langle hh \rangle &= \frac{i}{\kappa^4 p^2 D} \left\{ 2P^{(2)} + 2\kappa^4 \left[ \frac{3}{4}\lambda^2 + \alpha D \right] P^{(1)} - P^{(0-s)} + (4\alpha - 3) DP^{(0-\omega)} \right. \\
&\quad - \sqrt{3} (p^2 \kappa^4 v^2 + 1) (P^{(0-s\omega)} + P^{(0-\omega s)}) + \kappa^2 S + 3i\kappa^4 \lambda (\Pi^{(1-a)} + \Pi^{(1-b)}) \\
&\quad + \frac{3\kappa^4 p^2}{2} \Pi^{(2)} - \sqrt{3}i\kappa^4 \lambda (\Pi^{(\theta\Sigma-a)} + \Pi^{(\theta\Sigma-b)} + \Pi^{(\Sigma\theta)}) \\
&\quad \left. - \sqrt{3}\kappa^4 p^2 (\Pi^{(\theta L)} + \Pi^{(L\theta)}) \right\},
\end{aligned} \tag{3.63}$$

onde

$$p^2 D(p) = p^2(v^2 p^2 - (v.p)^2 + \kappa^4) \tag{3.64}$$

é a relação de dispersão, a partir da qual a estrutura de pólos pode ser encontrada. A identificação destes pólos e a discussão de sua natureza (levando-se em conta aspectos como causalidade e unitariedade) será objeto de futuras considerações. É interessante notar o fator  $p^2$ , indicando a presença de uma excitação de massa nula independentemente da natureza do vetor,  $v^\mu$ , de fundo. Esta é uma particularidade marcante do caso da gravitação.

# Capítulo 4

## Discussões Gerais e Perspectivas Futuras

Em vista do resultado final obtido para o propagador do campo do gráviton, ao qual foram incorporadas todas as ordens do parâmetro de quebra da simetria de Lorentz, neste caso o quadrivetor  $v_\mu$ , algumas questões merecem atenção para desenvolvimentos futuros.

A relação de dispersão que define a estrutura de pólos do propagador apresenta um interessante fatoração, como evidenciado no final do capítulo precedente. Este resultado assegura a existência de um pólo simples em  $p^2 = 0$ , qualquer que seja o quadrivetor de fundo,  $v^\mu$ . No caso de Maxwell ou Yang-Mills com quebra da simetria de Lorentz realizada também por um termo de Chern-Simons, excitações de massa nula ocorrem apenas sob certas condições sobre o quadrivetor de fundo, como discutido no trabalho citado na ref.[9]. Esta marcante diferença entre o caso de Yang-Mills e o caso gravitacional deve-se ao fato de que o termo com quebra de Lorentz para as simetrias internas introduz apenas uma derivada do campo, enquanto que no

caso gravitacional este mesmo termo introduz três derivadas sobre o campo gravitacional. Desta forma, compreende-se que se pode sempre fatorar uma potência do tipo  $p^2$  na ação quadrática do campo de gravitação, o que inevitavelmente conduz ao pólo simples em  $p^2 = 0$ . O mesmo não ocorre no caso de Yang-Mills.

Permanecem a serem estudadas questões relativas à propagação de modos físicos massivos de spin-2. Na situação em que o vetor externo é do tipo-espaço, estes modos podem ser excitados e uma anisotropia na propagação das diferentes componentes de polarização poderá vir a ser observada. Este é um ponto específico que dever vir a ser analisado em seguida.

No caso das teorias com quebra espontânea de simetria de calibre em presença do termo que viola a simetria de Lorentz, estudou-se [9] o efeito competitivo entre a massa advinda do mecanismo de Higgs e a massa induzida pelo parâmetro de massa que parametriza a violação da simetria de Lorentz. No caso particular da gravitação, ao invés de uma quebra espontânea de simetria de calibre, uma outra forma de gerar uma massa que compete com o parâmetro de massa da violação de Lorentz seria através de uma constante cosmológica. Esta situação abre as portas para uma outra possível investigação: a discussão do espectro de excitações do propagador do gráviton em presença de constante cosmológica e do vetor de fundo que viola a simetria de Lorentz. O termo de constante cosmológica, apesar de não violar a simetria local, pois é perfeitamente invariante sob transformações gerais de coordenadas, introduz grávitons massivos. A motivação, então, seria recalcular o propagador do campo de gravitação nestas circunstâncias e analisar a estrutura de pólos que será gerada. A relação de dispersão obtida nos mostrará

claramente o resultado final da competição entre os dois efeitos de geração de massa.

Finalmente, uma outra proposta que o nosso método de cálculo desenvolvido no Capítulo 3 pode motivar é uma discussão a respeito da torção em presença do termo de quebra da simetria de Lorentz. Introduzindo-se as componentes de torção no termo do tipo Chern-Simons gravitacional, a quebra da simetria de Lorentz naturalmente acoplará modos de torção às flutuações na métrica, o que gerará um espectro de excitações bastante complexo e poderá induzir, como interessante resultado, uma nova escala de energia para a excitação dos modos de torção.

Outros encaminhamentos podem ser mencionados para estudos no modelo de gravitação com quebra da simetria de Lorentz, com resultados concretos já existentes na contrapartida de Yang-Mills: a introdução da supersimetria [10] e a redução dimensional a  $(1+2)D$  em associação com a quebra de Lorentz [11]. A tarefa de supersimetrizar o termo topológico que realiza a quebra de Lorentz pode revelar interessantes conseqüências na discussão do problema da massa do gravitino que agora, devido à violação da simetria de Lorentz, pode apresentar termos de massa que o acoplam ao gráviton no setor livre da ação, graças à existência de um férmion de fundo que acompanha o vetor ordinariamente usado para quebrar a simetria de Lorentz. Esta questão envolverá aspectos técnicos não-triviais no que diz respeito à presença de uma matriz com setores bosônico (comutante) e fermiônico (Grassmanniano) no cálculo dos propagadores envolvendo o gráviton e o campo de Rarita-Schwinger, e será interessante observar como condensados do férmion de fundo, introduzido pela supersimetria, contribuem para as massas físicas

do setor gravitacional, no qual aparecerá um propagador misto entre o campo de flutuação da métrica e o campo de Rarita-Schwinger.

# Apêndice A

## Relações de Dualidade em (1+2)D

Neste Apêndice, reunimos equações e identidades relevantes para manipulações algébricas com o setor espacial de teorias de calibre planares.

$$\omega_{ij} = \partial_i \partial_j = \frac{\varepsilon_{im} \tilde{\partial}_m \varepsilon_{jn} \tilde{\partial}_n}{\tilde{\nabla}^2}, \quad (\text{A.1})$$

então

$$\omega_{ij} = \frac{1}{\tilde{\nabla}^2} (\delta_{ij} \tilde{\nabla}^2 - \partial_i \partial_j) = \tilde{\theta}_{ij} \quad (\text{A.2})$$

$$\theta_{ij} = \delta_{ij} - \omega_{ij} = \delta_{ij} - \tilde{\theta}_{ij} \quad (\text{A.3})$$

$$\theta_{ij} = \tilde{\omega}_{ij}. \quad (\text{A.4})$$

Usando estas relações, obtemos

$$\tilde{A}^T_i = \varepsilon_{ij} A_j^T = \varepsilon_{ij} (A_j - \frac{\partial_i \partial_k}{\tilde{\nabla}^2} A_k), \quad (\text{A.5})$$

do que resulta

$$\tilde{A}^T_i = \tilde{\theta}_{ik} \tilde{A}_k = \omega_{ik} \tilde{A}_k. \quad (\text{A.6})$$

Logo:

$$\tilde{A}^T = (\tilde{A})_L. \quad (\text{A.7})$$

Da mesma forma:

$$\widetilde{A}^L{}_i = \varepsilon_{ij} A_j^L = \varepsilon_{ij} \frac{\partial_j \partial_m}{\nabla^2} A_m = \frac{\widetilde{\partial}_i \widetilde{\partial}_m}{\widetilde{\nabla}^2} \widetilde{A}_m; \quad (\text{A.8})$$

então,

$$\widetilde{A}^L{}_i = \widetilde{\omega}_{ij} \widetilde{A}_j = \theta_{ij} \widetilde{A}_j \quad (\text{A.9})$$

e, finalmente,

$$\widetilde{A}^L = (\widetilde{A})_T. \quad (\text{A.10})$$

# Bibliografia

- [1] S. Carroll, G. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).  
Q. G. Bailey and A. Kosteletsky, hep-ph/0407252.  
B. A. Lim, astro-ph/0407437.  
D. L. Anderson, M. Sher and I. Turan, Phys. Rev. D **70**, 016001 (2004).  
H. Belich, Tese de Doutorado, CBPF, Junho de 2003.
- [2] R. Jackiw, S. Y. Pi, Phys. Rev. D **68**, 104012 (2003).  
R. Jackiw, gr-qc/0310115.
- [3] V.A. Kosteletsky, Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004).
- [4] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann. Phys. (NY) **140**, 372 (1982);  
Phys. Rev. Lett **48**, 975 (1982).
- [5] F. C. Nunes and G. O. Pires, Phys. Lett. B **301**, 339 (1993).
- [6] K. J. Barnes, Ph.D. thesis, (1963), unpublished.  
R. J. Rivers, Nuovo Cimento **34**, 387 (1964)
- [7] D. Colladay and V. A. Kosteletsky, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998);  
Phys. Rev D **55**, 6760 (1997).
- [8] A. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Lett. B **405**, 249 (1997); Phys.Rev  
D **59**, 116008 (1999).

- [9] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **67**, 085021 (2003).
- [10] H. Belich, J. L. Boldo, L. P. Colatto and J.A. Helayel-Neto, A. L. M. A. Nogueira Phys. Rev. D **68**, 065030 (2003);  
A. P. Baeta Scarpelli, J. L. Boldo, L.P. Colatto, J. A. Helayel-Neto and A. L. M. A. Nogueira; Nucl. Phys. B **127**, 105 (2004)-Proc.Suppl.
- [11] H. Belich, M.M. Ferreira, J.A. Helayel-Neto and M.T.D. Orlando; Phys. Rev. D **67**: 125011 (2003).
- [12] J. L. Boldo, J. A. Helayel-Neto, C. Sasaki and V. J. Vasquez Otoyá, Trabalho apresentado na II International Conference on Fundamental Interactions, Pedra Azul-ES, Junho-2004; a ser submetido para publicação.