PG2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS: lista completa de questões (lista da apostila + lista extra)

Observações: As referências à apostila correspondem a sua versão preliminar (a versão final vai aparecer em breve nesta página). As questões indicadas com asterisco são as obrigatórias, o resto é optativo, portanto tem só 20 questões obrigatórias.

Q. 1: Quanto vale $P(X = a)$ no caso contínuo? Quanto vale $F_X(\infty)$?

*Q. 2: Seja X uniformemente distribuída no intervalo $[0, 1]$, ache $Y(X)$ tal que sua densidade seja exponencial $f_Y(y) = \alpha e^{-\alpha y}$, para $y \geq 0$ (com $\alpha > 0$). Testar o resultado, gerando um grande número de valores de Y e fazendo um histograma

Q. 3: Qual é a expressão para $f_{X|Y}$ quando X e Y são independentes.

Q. 4: Para as FDPs de Poisson e exponencial calcule $P(X > s + t | X > s)$ e interprete.

Q. 5: Sendo α e β constantes, expresse a variância de $(\alpha X + \beta)$ em termos de σ_X^2.

Q. 6: Calcule a variância de $Y = X_1 + X_2$, sendo X_1 e X_2 independentes. Generalize para a soma de $n > 2$ variáveis aleatórias independentes.

Q. 7: A variância é sempre uma quantidade finita? e a média? Dê exemplos.

Q. 8: Sendo α e β constantes, calcule a FC de $(\alpha X + \beta)$ em termos de G_X.

*Q. 9: Expresse G_{X+Y} em termos de G_X e G_Y, sendo X e Y independentes. Generalize para N variáveis aleatórias independentes.

*Q. 10: Calcule a FC de uma variável com distribuição normal N(0,1) e a partir dela os momentos e cumulantes. Calcule a FC da soma de duas variáveis com essa distribuição.

*Q. 11: Calcule a FC de uma variável com distribuição lorentziana (2-gaussiana na tabela da Sec. 1.4 da apostila) e a partir dela conclua sobre os momentos. Calcule a FC da soma de duas variáveis com essa distribuição.

Q. 12: Provar que $|\rho(X, Y)| \leq 1$ e que a igualdade vale se existe dependência linear entre X e Y.

Q. 13: Procure um exemplo de variáveis descorrelacionadas porêm dependentes.

*Q. 14: Mostre que, para a distribuição gaussiana bidimensional, descorrelação implica independência. Analise a validade dessa afirmação no caso multidimensional.

Q. 15: Para a variável $X = (X_1, \ldots, X_n)$ com distribuição gaussiana multidimensional de média nula, ache os momentos $\langle X_1 X_2 X_3 \rangle$, $\langle X_1 X_2 X_3 X_4 \rangle$,

$\langle X_1 X_2 X_3^2 \rangle$ e $\langle X_1^2 X_2^2 \rangle$.

*Q. 16: Ache numericamente a distribuição da soma de N variáveis aleatórias uniformes no intervalo $[-1, 1]$, com $N = 2$ e 10. Discuta o resultado numérico com relação ao TLC.

*Q. 17: Sendo X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição N(0,σ^2), ache as distribuições de (a) $Z = X^2 + Y^2$, (b) $W = X/Y$ e (c) $V = e^X$ (log-normal).

Q. 18: Ache a distribuição definida num intervalo finito para a qual a entropia S é máxima?

Q. 19: Dadas duas variáveis independentes X e Y, ache a relação entre a entropia da distribuição conjunta e as entropias das distribuições marginais.

*Q. 20: No caso particular em que $p = q = 1/2$, derive a equação de difusão a partir da relação (23) da apostila.

*Q. 21: Considere W caminhantes aleatórios independentes. Cada caminhante encontra-se inicialmente na origem de coordenadas e avança sobre o eixo x com passos unitários (± 1) equiprováveis em cada iteração. A partir de simulações computacionais:
i) Calcule o desvio quadrático do deslocamento $\sigma^2 \equiv \sigma^2_{X_N}$ como função do tempo para $W = 1000$ e até tempo $N = 500$.
ii) Para $W = 10000$ faça um histograma do número relativo de caminhantes em cada intervalo do eixo x para os tempos $N = 100$ e $N = 400$.
iii) Compare os resultados obtidos com as predições teóricas.

*Q. 22: Para processos estacionários, conclua sobre a dependência temporal das densidades de um e de dois tempos, f_1 e f_2, respectivamente.

*Q. 23: Para o caminhante aleatório da Q. 20, calcule $\text{cov}(X_{N_0}, X_{N_0+N})$. É esse um processo estacionário?

*Q. 24: Para processos puramente aleatórios, ache uma expressão para f_n.

*Q. 25: Para processos markovianos, ache uma expressão para f_n.

Q. 26: Caracterize o processo de Wiener.

Q. 27: Com relação à expressão (33) da apostila, para $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$, interprete o limite para tempo longo.

*Q. 28: Rederive as expressões (29) a (33) da apostila, para o caso em que a correlação do ruído é da forma $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle \propto 1/(1 + \frac{|t-t'|}{\tau_c}^{\nu})$, com $\nu > 0$. Analise o limite $|t - t'| >> \tau_c$.

Q. 29: Considere a Eq. de Langevin $\dot{z} = z\eta(t)$, calcule os momentos de z como função do tempo, sendo η um ruído gaussiano δ-correlacionado e com média nula.

Q. 30: Derive detalhadamente a expressão (46) da apostila e mostre que para tempo longo $\sigma(t) \to Dt$, com D constante.

*Q. 31: A partir da Eq. (49) da apostila, ache os primeiros momentos para os casos em que (i) $F(x) = C$ e (ii) $F(x) = -Kx$, onde C e K são constantes. Relacione os resultados com outros anteriores.

*Q. 32: A partir da Eq. (49) ache a FDP da posição, em ausência de força externa.

Q. 33: Utilizando um procedimento semelhante ao seguido para achar a Eq. (83) da apostila (caso unidimensional), mostre que a equação de Fokker-Planck associada à equação de Langevin (36) da apostila é

$$\partial_t f(\mathbf{x}, t) \;=\; -\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}[F_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, t)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \Gamma_{ij} \partial^2_{x_i x_j} f(\mathbf{x}, t). \qquad (1)$$

*Q. 34: Utilizando o resultado da questão anterior, mostre que para a equação de Langevin (34): $\dot{v} = -\gamma v + F(x) + \eta(t)$, onde η é um ruído gaussiano delta correlacionado com média nula, a equação para a densidade $f(x, v, t)$ é a seguinte equação de FP, também denominada *equação de Kramers* unidimensional:

$$\partial_t f = -v\partial_x f - F(x)\partial_v f + \gamma\partial_v(vf) + (\Gamma/2)\partial^2_{vv} f. \qquad (2)$$

*Q. 35: Para a equação de Langevin $\dot{v} = -\gamma v + F(v)\eta(t)$, onde η é uma variável aleatória gaussiana delta correlacionada com média nula, ache os coeficientes da EFP, segundo a interpretação de (a) Itô e de (b) Stratonovich.

*Q. 36: Encontre a densidade espectral para o ruído δ-correlacionado $\eta(t)$ segundo definido na seção 3.1 da apostila. Como se modifica o resultado se a correlação tem uma largura finita?

*Q. 37: Conclua sobre a forma da função de autocorrelação sabendo que a densidade espectral é da forma $S(f) \sim f^{-\beta}$.